56. Infinite Product Space の Weak Topology

小松 醇郎

昭和十九年に 位相空間論 に一寸書いた事ですが終りの近傍系の所少し不明確と思ひますので此処に再び話します。

Topology のある Space R^x の $X=\{x\}$ Produkt・R

記号 $R = P\{R^x | X\}$

とは $p=\{p^x | x \in X\}$ $p^x \in R^x$ なる凡ゆる点 p の集合であつてその Topology は先づ projection $\pi^x : p \to p^x \ (R \to R^x)$ が連續なるものをとるのが普通である。

1) R^x の Topology が monotone ($M^x \supset N^x \to \overline{M^x} \supset \overline{N^x}$ in R^x) のとき R が monotone で最も弱い topology を求める。

$R \supset M$ に對し $\pi^x(M) = M^x = \{p^x | p \in M\}$ と表せば

${}^m\overline{M} = P\{\overline{M^x} | x \in X\}$ が求める topology である。

是が monotone なる事は

$$M \supset N \rightarrow (\forall x)\, M^x \supset N^x \rightarrow (\forall x)\, \overline{M}_x \supset \overline{N}_x \rightarrow \cdots, \supset {}^m\overline{N}$$

是で π^x が連続なる事は

$$\pi^x({}^m\overline{M}) = \overline{M}^x = \overline{\pi^x(M)}$$

から明かである. 又最も弱い事 明である.

2) R で *additive* で最も弱い *topology* を求める.

$M(\subset R)$ の有限被覆 μ

$$\mu :\ M = M_1 \cup \cdots\cdots \cup M_{n_\mu}$$

として凡ゆる有限被覆の集合 $\mathfrak{M} = \{\mu\}$ とする. M の *closure* として

$$\widetilde{M} = \bigcap_{\mathfrak{M}} ({}^m\overline{M}_1 \vee \cdots\cdots \cup {}^m\overline{M}_{n_\mu})$$

とすれば $\widetilde{M}$ は求むる最も弱い *additive topology* である.

$\widetilde{M}$ が *additive topology* ${}^a\overline{M}$ で最も弱いことは,

Additive topology は *monotone* であるから任意の部分集合 N で

$${}^a\overline{N} \subset {}^m\overline{N}.$$

故に ${}^a\overline{M} = {}^a\overline{M}_1 \vee \cdots\cdots {}^a\overline{\cup M}_{n_\mu} \subset {}^m\overline{M}_1 \cup \cdots\cdots \cup {}^m\overline{M}_{n_\mu}$

$$\therefore \quad {}^a\overline{M} \subset \widetilde{M}$$

次に $\widetilde{M}$ が *additive* なることは 任意の分割 $M = A \cup B$ に対し A, B の有限被覆の集合 $\mathfrak{A} = \{\alpha\}$ $\mathfrak{B} = \{\beta\}$ とすれば 定義から

$$\widetilde{A} = \bigcap_{\mathfrak{A}} ({}^m\overline{A}_1 \cup \cdots\cdots \cup {}^m\overline{A}_{n_\alpha}),$$

$$\widetilde{B} = \bigcap_{\mathfrak{B}} ({}^m\overline{B}_1 \cup \cdots\cdots \cup {}^m\overline{B}_{n_\beta})$$

$$\widetilde{A} \cup \widetilde{B} = \bigcap_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}} \left(\bigcup_{i=1}^{n_\alpha} {}^m\overline{A_i} \vee \bigcup_{i=1}^{n_\beta} {}^m\overline{B_i}\right)$$

扨て (α, β) は M の有限 μ: $M = A_1 \cup \cdots\cdots \cup A_{n_\alpha} \cup B_1 \cup \cdots\cdots \cup B_{n_\beta}$ を一つ定める. 即ち $\mathfrak{M}$ の部分集合である. 故に

$$\widetilde{A} \cup \widetilde{B} \supset \widetilde{M}.$$

逆に M の有限被覆 $\mu : M = M_1 \cup \cdots\cdots \cup M_{n_\mu}$ を任意一つとれば

$$\alpha : A = \bigcup_{i=1}^{n_\mu} (M_i \cap A) = \cup A_i,$$

$$\beta : B = \bigcup_{i=1}^{n_\mu} (M_i \wedge B) = \cup B_i$$

と A, B の有限被覆 α, β が定まる. 且つ $M_i \supset A_i$ B_i から

$${}^m\overline{M_i} \supset {}^m\overline{A_i}, \qquad {}^m\overline{M_i} \supset {}^m\overline{B_i} \text{ である.}$$

故に

$$\bigcup_{i=1}^{n_\mu} {}^m\overline{M_i} \supset \bigcup_{i=1}^{n_\mu} {}^m\overline{A_i} \cup \bigcup_{i=1}^{n_\mu} {}^m\overline{B_i} \supset \widetilde{A} \cup \widetilde{B}$$

$$\therefore\ \widetilde{M} \supset \widetilde{A} \cup \widetilde{B}$$

最後に $\widetilde{M}$ で π^x が連續なることは

$$\pi^x(\widetilde{M}) < \pi^x({}^m\overline{M}) = \overline{\pi^x(M)}$$

3) 以上の *weak topology* を近傍系で考へる。先づ U^x を R^x で p^x の近傍とする。即ち $\overline{U^{x\prime}} = \overline{R^x - U^x} \not\ni p^x$ とする。${}^m\overline{M}$ *topology* で

$$U = U^x \times P'\{R^y \mid y \in X - x\}$$

は点 p ($\pi^x(p) = p^x$) の近傍である。

$${}^m\overline{U'} = {}^m\overline{U^{x\prime} \times P'\{R^y\}} = \overline{U^{x\prime}} \times P'\{R^y\},\quad \overline{U^{x\prime}} \not\ni p^x$$

であるから ${}^m\overline{U'} \not\ni p$

R^x で p^x の凡ゆる近傍系 U^x_δ，x を X の凡てをとつて生ずる凡ゆる近傍 $\{U_{\delta,x}\}$ が点 p の近傍系を作る。

何となれば N を点 p の任意の近傍とする。故に ${}^m\overline{N'} \not\ni p$，即ち

$$P\{\overline{N'^x} \mid x \in X\} \not\ni p,$$

故にある x で $\overline{N'^x} \not\ni p^x$，即ち $(N'^x)'$ は p^x の一つの近傍 U^x

即ち　$N'^x = U^{x\prime}$ である。

$$N' < P\{N'^x \mid x \in X\} < U^{x\prime} \times P'\{R^y \mid y \in X - x\} = U'_{\delta,x}$$

であるから $N \supset U$，即ち N は点 p の近傍である。

4) 次に *Weakest additive topology* $\widetilde{M}$ の近傍系を求める。

$\widetilde{M} < {}^m\overline{M}$ であるから ${}^m\overline{M}$ での p の近傍 $U_{\delta,x} = U^x_\delta \times P'\{R^y\}$ は又 $\widetilde{M}$ で p の近傍である。*additive* から U_1, U_2 を此の如き近傍とすれば $U_1 \cap U_2$ は又 p の近傍である。

逆に $\{U_{\delta,x}\}$ を近傍系の *Subbase* とする *topology* を考へれば題 *additive* である。即ち此の *topology* は ${}^m\overline{M}$ より強いうちで最も弱い *Additive topology* であつて $\widetilde{M}$ である。

従つて R^x が又凡て *additive topology* であるならば $\mathfrak{M}$ での近傍系は普通の *weak topology* に一致する．即ち．

$$U_1 \cap \cdots\cdots \cap U_n : \begin{cases} U_i = U_i^{x(i)} \times P'\{R^y \mid y \in \lambda - x(i)\} \\ \overline{U_i^{x(i)}} \ni p^{x(i)} \\ x(i) \neq x(j) \quad \text{for } i \neq j \end{cases}$$

が点 $p = \{p^x\}$ の近傍である．

R^x が *monotonic topology* ならば必ずしもこれのみとは言へない

$$U_1 = U_1^x \times P'\{R^y\} \qquad \overline{U_1^{x}} \ni p^x$$

$$U_2 = U_2^x \times P'\{R^y\} \qquad \overline{U_2^{x}} \ni p^x$$

とすれば $U_1 \cap U_2$ は $\mathfrak{M}$ *topology* で p の近傍であるが

$$U_1 \cap U_2 = (U_1^x \cap U_2^x) \times P'\{R^y\}$$

と表すとき $\overline{(U_1^x \cap U_2^x)}' \ni p^x$ とは限らない。

例へば $R' = \{a, b, c\}$ *topology* は $\overline{a} = b,\ \overline{b} = a,\ \overline{c} = c$.

$\overline{a \cup b} = \overline{a \cup b}$．$\overline{b \cup c} = a \cup c$，$\overline{a \cup c} = a \cup b \cup c$　$\overline{a \cup b \cup c} = a \cup b \cup c$.

R^2 は線分 I $(0 \leq t \leq 1)$ で普通の *topology*

とする．R' で点 a の近傍は $\{b \cup c,\ a \cup b,\ a \cup b \cup c\}$ であり，$R' \times R^2$ で $\mathfrak{M}$ *topology* では $p = (a \times t)$ の近傍は

$$U_1 = (a \cup b) \times I, \quad (b \cup c) \times I = U_2$$

を持つ　故に $U_1 \cap U_2 = b \times I$ は又 $p = (a \times t)$ の近傍であるが b は R' で a の近傍ではない。　　　　(1947. 6. 11)